Cours POLYNÔMES FORMELS

1 Les polynômes formels

Définitions et généralités sur les polynômes

Polynôme

Un **polynôme** **à coefficients dans** $\mathbb{K}$ est une suite $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang.
Les termes d'une telle suite sont appelés coefficients du polynôme.
La condition qui dit que « *tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang* » est notée rigoureusement de la manière suivante :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Longrightarrow a_n = 0$$

Et se lit : Il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N on a $a_n = 0$.

- Le polynôme nul noté $P = 0$ est représenté par une suite où **tous les termes sont nuls**.

$$P = 0 = (0, 0, 0, 0, \dots)$$
$$P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0$$

- Le polynôme constant est représenté par une suite où tous les termes sont nuls sauf le premier (de rang 0).

$$P = a = (a, 0, 0, 0, \dots)$$

Remarque

Puisqu'un polynôme peut être représenté par une suite et qu'une suite peut être représentée par un n-uplet, alors les polynômes peuvent être représenté par un n-uplet où chaque élément correspond à un coefficient de ce dernier.

Degré d'un polynôme

Soit P un polynôme non nul.
Alors le rang à partir duquel tous les termes du polynôme sont nuls est appelé **le degré**, noté simplement $deg(P)$ et défini rigoureusement comme suit :

$$deg(P) = max\,\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

Si le polynôme est nul, on pose $deg(P) = -\infty$

Exemple

Le polynôme P suivant est de degré 7.

$$P = (a, b, 0, 0, 0, c, 0, d)$$

Remarque

Le degré c'est le rang du **dernier terme non nul** de la suite.

L'indéterminée X

Soit $k \in \mathbb{N}$. On défini X^k de la manière suivante :

- Si $k = 0$: X^k est le polynôme constant $(1, 0, 0, \dots)$ noté 1.
- Si $k = 1$: X^k est le polynôme $X = (0, 1, 0, 0, \dots)$ et est appelé **l'indéterminée X**.
- Si $k \geq 2$: X^k est le polynôme $X^k = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$a_k = 1 \qquad a_n = 0, \quad \forall n \neq k$$

Exemple

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.
$P(X) = a(1,0) + b(0,0,1) = a + bX^2$ $\quad P(X) = a(0,0,0,1,0,\ldots) = aX^3$ $\quad P(X) = (0,0,0,0,1,0,0,\ldots) = X^4$

Polynôme de l'indéterminée X

Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $N \in \mathbb{N}^*$. Alors P s'écrit :

$$P(X) = a_0X + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_NX^Nn = \sum_{k=0}^{N} a_kX^k$$

On l'appelle **polynôme de l'indéterminée X**.

Propriété

Égalité de 2 polynômes

Soit $P = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Alors, on dit que P et Q sont égaux lorsque :

$$P = Q \iff \forall k \in \mathbb{N}, \quad p_n = q_n$$

Remarque

Puisqu'un polynôme est en réalité une suite, l'égalité d'un polynôme se déduit de celle des suites :

- Ils sont de même degré.
- Leurs coefficients sont égaux deux à deux.

L'espace $\mathbb{K}[X]$

On prendra l'habitude dans ce cours de noter un polynôme sous forme de somme.

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

L'espace $\mathbb{K}[X]$

Lorsque l'on écrit $P \in \mathbb{K}[X]$, cela signifie que l'on considère un polynôme P **à coefficients dans $\mathbb{K}$**.
Ainsi un polynômes à coefficients réels appartient à $\mathbb{R}[X]$.

Coefficient, terme, polynôme unitaire

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

Soit $k \in [\![0; n]\!]$,

Coefficient

Le coefficient a_k est appelé **coefficient de degré k**.

Terme de degré k

L'expression a^kX^k est appelée **terme de degré k** ou **monôme de degré** k.

Polynôme unitaire

Un polynôme est dit **unitaire** si son coefficient de degré le plus élevé est égal à 1.

Exemple

- Le polynôme $P_1 = 2X^2 + X^2 + 8X^4$ est de degré 4 et le coefficient du monôme $8X^4$ est 8, alors P_1 n'est pas unitaire.
- $P_2 = X^3 + 5X^4 + X^5$ est de degré 5 et le coefficient du monôme X^5 est 1 alors on dit que P_2 est unitaire.

Remarque

En gros pour qu'un polynôme soit unitaire il faut que le coefficient du monôme du plus haut degré soit 1.

Opérations et propriétés

Somme, produit par un scalaire, produit

Soient $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ donnés par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \text{ et } Q(X) = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$$

Somme de deux polynômes

Lorsque l'on effectue la **somme de deux polynômes**, il suffit d'ajouter les termes de même degré entre eux.

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (p_k + q_k) X^k$$

Le degré de $P + Q$ donné $deg(P + Q) \leq max\,\{deg(P), deg(Q)\}$.

Produit par un scalaire

Quand on **multiplie un polynôme par un scalaire** λ il suffit simplement de multiplier chaque coefficient du polynôme par λ.

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda p_k) X^k$$

Le degré de λP est donné par $deg(\lambda P) = deg(P)$, on multiplie les coefficients par λ sans changer l'exposant de chaque monôme, le degré reste le même.

Produit de deux polynômes

Le **produit de deux polynômes** peut sembler complexe mais au final il suffit de développer le produit en pensant à ajouter les puissances si il y en et à regrouper les termes entre eux.
La formule peux sembler difficile mais la méthode est plus simple.

$$PQ = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i} \right) X^k$$

Le degré de PQ est donné par $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$.

Propriété

PUISSANCES

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

Propriété déjà connue...

Exemple

Pour les polynômes : $2X^4 \times 4X^2 = (2 \times 4)X^{4+2} = 8X^6$

Exemple

Soient $P(X) = 2X^3 + X^2 + 7X + 4$ et $Q(X) = 2X^2 + 4$
Alors :

$$\begin{aligned} PQ &= (2X^3 + X^2 + 7X + 4) \times (2X^2 + 4) \\ &= 4X^5 + 8X^3 + 2X^4 + 4X^2 + 14X^3 + 28X + 8X^2 + 16 \\ &= 4X^5 + 16X^4 + 22X^3 + 12X^2 + 16 \end{aligned}$$

Méthode

Calculer le produit de deux polynômes

1. Développer entièrement le produit.
2. Rassembler les termes de même degré.
3. Conclure.

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

Propriété

Additions de polynômes

1. Commutativité : $P + Q = Q + P$
2. Associativité : $(P + Q) + R = P + (Q + R)$
3. Neutre : $P + 0 = 0 + P = P$
4. Opposé : $P + (-P) = 0$

Propriété

Produit par un scalaire

1. Neutre : $1P = P$
2. Commutativité : $\lambda P = P\lambda$
3. Associativité : $\lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P$

Propriété

Distributivité – Addition & Produit par un scalaire

$\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q$ et $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P$

Remarque

Ces propriétés font de $\mathbb{K}[X]$ un espace vectoriel.

Propriété

Distributivité addition/produit

$P(Q + R) = PQ + PR$ et $(P + Q)R = PR + QR$

Propriété

Produit de polynômes

1. Commutativité : $PQ = QP$
2. Associativité : $(PQ)R = P(QR)$
3. Neutre : Soit $P' = 1$, $PP' = 1$

Remarque

Les propriétés des opérations sur $\mathbb{K}[X]$ font de lui un anneau.

Puissance d'un polynôme

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P^k = PP^{k-1} \text{ et on a } P^0 = 1$$

Formule de Newton appliquée aux polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

Composition de polynômes

Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Alors on a :

$$P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$$

Cela revient à « évaluer » le polynôme en Q, calculer le polynôme en Q.

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Division euclidienne

Théorème de la division euclidienne

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Alors il existe un couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

$$A = BQ + R \qquad \text{avec } deg(R) < deg(B)$$

Les polynômes Q et R représentent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A (le dividende) par B (le diviseur).

Remarque

La méthode de la division euclidienne sera expliquée en détail pendant le tutorat.

Polynômes divisibles

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.
Si le reste de la division euclidienne de A par B est nul $R = 0$ alors on dit que **B divise A**.

$$A = BQ$$

Racine d'un polynôme

Racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{K}$. On dit que x_0 est une **racine** de P si et seulement si :

$$P(x_0) = 0$$

Si l'évaluation de P en x_0 est nulle.

Exemple

$$P(X) = X^2 + 2X - 8$$

Ici on a

$$P(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 8 = 4 + 4 - 8 = 8 - 8 = 0$$

Alors on dit que 2 est une racine du polynôme P.

Propriété

Racine et divisibilité

On dit que x_0 est une racine de P si et seulement si $(X - x_0)$ divise le polynôme P.

Ordre de multiplicité

Soit $k \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_0 \in \mathbb{K}$:

- x_0 est une « racine d'**ordre de multiplicité** k » de P si $(X - x_0)^k$ divise P et $(X - x_0)^{k+1}$ ne divise pas P. C'est à dire $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X - x_0)^k Q \text{ et } Q(x_0) \neq 0$$

- **racine simple** d'ordre de multiplicité 1
- **racine double** d'ordre de multiplicité 2
- **racine triple** d'ordre de multiplicité 3

Racine évidente

Racine d'un polynôme que l'on peut trouver sans utiliser des méthodes élaborées.

Polynôme irréductible

On appelle **polynôme irréductible** tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant, n'ayant comme diviseur que des polynômes constants et les polynômes λP, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
Les polynômes irréductibles :

- Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes de degré 1
- Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes de degré 1 et de degré 2 avec $\Delta < 0$.